

数 学

(120分)

数学I, 数学II, 数学III, 数学A, 数学B

2023年3月12日

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は6ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は4枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に、途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄(2か所)に必ず記入しなさい。
- 5 試験終了後は、解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 6 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

このページは空白である。

第1問 (100点)

問1 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 (x,y) が

$$x = 4t^3, \quad y = 6t^2$$

で表されるとき、 $t=0$ から $t=1$ までにPが通過する道のりを求めよ。

問2 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \cos(3^{-x}\pi)$$

問3 次の不定積分、定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx$

第2問 (90点)

問1 すべての自然数 n に対し

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} > \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

が成り立つことを証明せよ。

問2 次の命題の真偽をそれぞれ調べよ。真ならば証明をし、偽ならば反例を一組あげよ。
ただし、 a, b は整数とする。

(1) ab を 3 で割った余りが 1 ならば、 a か b のどちらかを 3 で割った余りは 1 である。

(2) ab を 3 で割った余りが 2 ならば、 a か b のどちらかを 3 で割った余りは 2 である。

第3問 (100点)

箱の中に、1から8までの赤色の番号札8枚と、1から8までの青色の番号札8枚が入っている。この箱から番号札を3枚引くとき、次の問いに答えよ。

問1 3枚とも同じ色の札である確率を求めよ。

問2 3枚が連続した数である確率を求めよ。

問3 3枚が同じ色であり、かつ連続した数である確率を求めよ。

問4 3枚が同じ色であるか、または連続した数である確率を求めよ。

問5 3枚のうち、2枚が同じ数である確率を求めよ。

第4問 (110点)

関数 $f(x) = 3e^{-x} - e^{-2x}$ について、次の問いに答えよ。

問1 $f'(x), f''(x)$ を求めよ。

問2 関数 $f(x)$ の増減, 極値と, 曲線 $y = f(x)$ の変曲点, 凹凸を調べよ。

問3 k を実数とするとき, 方程式 $f(x) = k$ を満たす解の個数を調べよ。

問4 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。